PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROIZVODNJI SLADOLEDA

Šarić, Nada

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of economics Split / Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:124:422544

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-18**

Repository / Repozitorij:

REFST - Repository of Economics faculty in Split

zir.nsk.hr

UNIVERSITY OF SPLIT

dabar

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE U SPLITU

EKONOMSKI FAKULTET SPLIT

ZAVRŠNI RAD

PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROIZVODNJI SLADOLEDA

Mentor: **Studentica:**

Prof.dr.sc. Zoran Babić **Nada Šarić**

Split, rujan 2019.

SADRŽAJ:

1. UVOD 2

2.1. Pojam i razvoj tehnika linearnog programiranja 3

2.2. Određivanje problema i odrednice definiranja modela linearnog programiranja 4

2.3. Metode rješavanja problema linearnog programiranja 6

2.3.1. Grafička metoda 7

2.3.2. Simpleks metoda 9

2.4. Kanonski problem i njegovo rješenje simpleks metodom 11

3. RAZRADA PROBLEMA PROIZVODNJE SLADOLEDA 15

3.1. Primjena programa WinQSB 15

3.3. Definiranje i formuliranje modela na primjeru proizvodnje sladoleda 17

4. ZAKLJUČAK 30

LITERATURA 31

POPIS SLIKA 32

POPIS TABLICA 32

SAŽETAK 33

SUMMARY 34

1. **UVOD**

Donošenje odluka proces je s kojim se svakodnevno susreću svi zaposlenici, neovisno o hijerarhijskoj razini. Glavni preduvjet za donošenje pravovremene, ispravne i učinkovite odluke čine poslovne informacije.[1]

Kod donošenja poslovnih odluka presudna je relevantnost i pravovremenost informacija koje se primjenom različitih tehnika obrađuju te se temeljem toga donose zaključci. Oni se odnose na koristi i troškove od različitih alternativa, tehnologija, planova, strategija i sl.

Nakon obrade informacija i analize donosi se odluka koju od najboljih alternativa izabrati tj. koju poslovnu odluku donijeti. Ovisno o industriji i problematici ali i postavljenim ciljevima ovisi koja će se od tehnika koristiti u procesu odlučivanja.

Jedna od popularnijih tehnika i često korištenih, posebno u proizvodnim granama je tehnika linearnog programiranja. Linearno programiranje spada u kvantitativne metode rješavanja problema osiguravajući uvrštenje cilja u proces analize.

Cilj rada je postizanje optimizacije, odnosno maksimiziranje korisnosti uz zadane uvjete što se rješava linearnim programiranjem. Također, svrha i ciljevi ovoga rada su teorijski i empirijski analizirati proces proizvodnje sladoleda, te pokazati jednostavnost primjene računalnog programa WinQSB u rješavanju problema linearnog programiranja vezanih uz procese proizvodnje.

Rad je oblikovan u dva dijela, teorijski i praktični. U teorijskom se iznose stručne spoznaje i načela prezentirane problematike, dok se u praktičnom prikazuje primjena i način rješavanja problema proizvodnog procesa te donošenje poslovnih odluka primjenom linearnog programiranja. Rad završava zaključkom koji daje osvrt na iznesene spoznaje o problematici i uočene rezultate primjene metoda u praksi.

[1] Šercer M. (2016): Poslovno odlučivanje temeljeno na poznavanju informacija iz mrežnog sučelja, Ekonomski fakultet u Osijeku

2. LINEARNO PROGRAMIRANJE

2.1. Pojam i razvoj tehnika linearnog programiranja

Linearno programiranje jednostavan je i praktičan skup metoda iz domene matematike koje se koriste u analizi i iznalaženju optimalnog rješenja s ciljem donošenja kvalitetnih i ispravnih poslovnih odluka. Ove tehnike tj. sami koncept linearnog programiranja kao tehnike odlučivanja uvodi u praksu Leonid Kantorović krajem 1930.godine. Prvotna primjena tehnika linearnog programiranja je bila upravo u proizvodnim procesima i djelatnosti proizvodnje.

U Sjedinjenim Američkim Državama linearno programiranje važnije mjesto nalazi u vrijeme Drugog Svjetskog rata kod rješavanja vojne problematike, poput definiranja ruta i prijevoza opreme. Kada je riječ o linearnom programiranju valja istaći da je značajan doprinos dao nobelovac Tjalling Koopmans.

Najkonkretnija, a opet dovoljno općenita (kako bi bila primjenjiva za sve grane) jest definicija linearnog programiranja koja kaže da je linearno programiranje grana matematike koja se bavi problemom optimizacije sustava uvažavajući određena ograničenja.[2]

Linearno programiranje promatra probleme gdje se linearna funkcija cilja teži optimizirati tj. dosegnuti minimum ili maksimum uz određena ograničenja koja su također iskazana u vidu jednadžbi ili/i nejednadžbi i uz nenegativne varijable odlučivanja. Potonje predstavlja formalni postupak optimizacije sustava gdje i kada se funkcija cilja i ograničenja iskazuju kao linearne kombinacije promjenljivih veličina. U slučaju cjelobrojnog programiranja i varijable odlučivanja su cjelobrojne.

[2] Pašagić, H., (2003.), Matematičke metode u prometu, Zagreb, str., 21.

2.2. Određivanje problema i odrednice definiranja modela linearnog programiranja

Važan dio i osnova razumijevanja kvantitativnih metoda i samog koncepta primjena matematike u poslovnom odlučivanju jest upravo linearno programiranje. Za praktičnu primjenu metode linearnog programiranja važno je da problematika ima informacijsku osnovu. To znači da se raspolaže s dovoljno relevantnih informacija za definiranje optimalnog rješenja.[3]

Primjer tome je definiranje resursa i ograničenja koji vrijede za proizvodni proces. Proizvodnja je dakle određena resursima koje čine strojevi, ljudski resursi, sirovine, tržište i cijene.

Strojevi određuju proizvodnju svojim kapacitetima ali i efektivnošću te ekonomičnošću tj. koliko im je potrebno za proizvodnju jedinice proizvoda te koliki je to trošak. Ljudski resursi određuju proizvodnju jer ona ovisi o radu koji je determiniran vremenom koje radnici mogu efektivno provesti u proizvodnom procesu. Tržište definira proizvodne procese jer determinira što i koje kvalitete će se proizvoditi temeljem same potražnje. Nadalje proizvodnju i njene ciljeve definiraju i cijene koje time utječu na prihode, troškove i zarade.

Ciljevi proizvodnje jesu minimizacija troškova i maksimizacija koristi tj. pronalazak optimalne razine proizvodnje koja zadovoljava određene uvjete za kapacitete, resurse i ciljeve organizacije. Tako se najprije definiraju ciljevi poput maksimizacije prihoda uz zadovoljenje ograničenja kapaciteta resursa proizvodnje. Tada se cilj iskazuje kao funkcija cilja tj. kao problem maksimuma. Prihod koji se teži maksimizirati dobije se umnoškom poznatih cijena (c) i jedinica proizvoda (x).

$$\text{Max } Z = (c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n),$$

što je uz poznate cijene (primjerice 2 i 5 za dva proizvoda koji se proizvode) jednako:

$$\text{Max } Z = (2x_1+5x_2)$$

[3] Ibidem, str. 26.

Tako, primjerice, strojevi na kojima se proizvodi obrađuju, imaju vremenska ograničenja od 21, 9 i 24 sata dnevno, što predstavlja ograničenje kapaciteta. Pošto se radi o realnom problem ekonomskog sektora jasno je da jedinice ne mogu biti negativne stoga se definira i uvjet nenegativnosti tj. da su proizvedene jedinice veće ili jednake od 0.

$x_1, x_2 \geq 0$

Kako je proizvodnja ograničena i kapacitetima resursa ona se uvode kao ograničenja rada strojeva. Ako se, primjerice, proizvod p_1 proizvodi tri sata na prvom i jedan sat na drugom stroju te jedan sat na trećem stroju poduzeća uz dnevni kapacitet stroja jedan od 21 sat, a drugi proizvod se proizvodi po jedan sat na prva dva i četiri sata na trećem stroju uz dnevni kapacitet stroja dva od 9 sati te stroja tri od 24 sata. Tada se kao dodatno ograničenje iskazuju uvjeti kapaciteta i potrebnih sati proizvodnje:

$3x_1+x_2 \leq 21$

$x_1+x_2 \leq 9$

$x_1+4x_2 \leq 24$

Jednak je postupak definiranja i problema minimuma uz razliku funkcije cilja i uvjeta nejednadžbi koje u slučaju ekonomske problematike poprimaju oznaku veće ili jednako. Potonji problem se može prikazati u matričnom obliku:

Max C^TX

$AX=B$

$X \geq 0$

gdje je

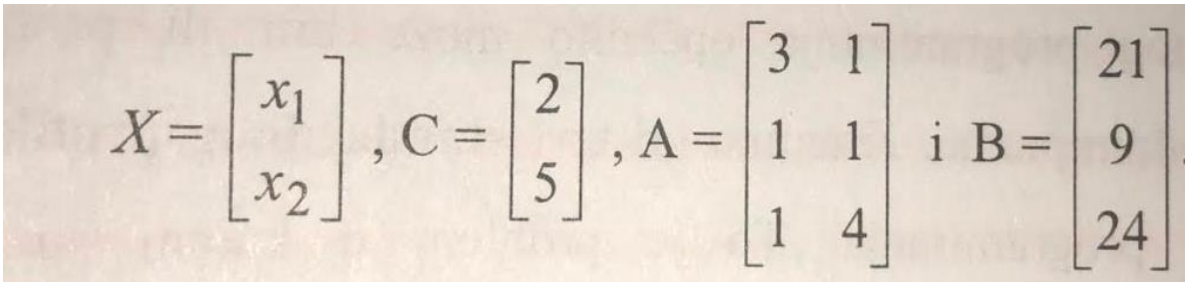
Slika 1: Prikaz matrice i vektora koji se nalaze u matričnom obliku problema

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Izvor: Babić, Z. (2011); Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 72.

Što za konkretni slučaj izgleda kao:

Slika 2. Prikaz matrice i vektora od kojih se problem formira



Izvor: Babić, Z. (2011), Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 72.

2.3. Metode rješavanja problema linearnog programiranja

Kao glavne tehnike linearnog programiranja se ističe grafička metoda, koja se može koristiti u slučaju kada problem linearnog programiranja ima samo dvije varijable, te simpleks metoda. Prije samog pojašnjenja metoda rješavanja problema linearnog programiranja valja istaći osnovna načela tj. teoreme linearnog programiranja (LP).

Da bi se neki problem mogao definirati kao problem LP on mora biti "moguć". Problem je moguć ako postoji barem jedan vektor X koji zadovoljava uvjete ograničenja te se takav vektor naziva mogući vektor tj. moguće rješenje danog problema LP.

Moguće rješenje je optimalno ako ostvaruje tj. maksimizira (u slučaju problema maksimuma) funkciju cilja. Svakom problemu maksimuma pridružen je problem minimuma tj. dual originalnog problema, odnosno u slučaju minimuma dualni problem maksimuma. Ako su problem linearnog programiranja i njegov dual mogući tada oba imaju optimalno rješenje i optimalne vrijednosti funkcija cilja su im jednake. Ako jedan od ta dva problema nije moguć tada ni drugi nema optimalno rješenje.

U skladu s navedenim moguća su četiri ishoda tj. tipa rješenja problema LP:[4]

1. Oba problema imaju optimalno rješenje i optimalne vrijednosti funkcije cilja su jednake,

[4] Ibidem, str. 79.

2. Originalni problem nema moguće rješenje, pa dualni nema optimalno,
3. Originalni problem ima moguće, ali nema optimalno rješenje iz čega slijedi da dual nema moguće rješenje,
4. Ne postoji rješenje ni na jednoj strani jer su uvjeti nekonzistentni, tj. sistemi nejednadžbi su u sebi kontradiktorni.

2.3.1. Grafička metoda

Crtanje grafova linearnih nejednadžbi s dvije varijable obuhvaća vizualno prikazivanje točki koje zadovoljavaju nejednadžbu kao skup rješenja. Takav graf je u stvari poluravnina. U skladu s odrednicama problema LP postoje 4 različite vrste nejednadžbi s dvije varijable koje se mogu pojaviti:

$$Ax + By < C,\ Ax + By \leq C,\ Ax + By > C,\ Ax + By \geq C$$

gdje su A, B i C konstante, te je barem jedan od koeficijenata A ili B različit od nule.

Za crtanje grafa nejednadžbi zadanih u jednom od spomenutih oblika potrebno je nacrtati odgovarajuću jednadžbu $Ax + By = C$, što je u stvari granični pravac. Crta se tako da se odrede točke s koordinatama (T1(0,y) i T2(x,0)) i povuče pravac kroz njih. Pravac se crta isprekidanom linijom u slučaju ograničenja < ili >, a punom linijom u slučaju ograničenja ≤ ili ≥. Sustav rješenja je poluravnina na jednoj od strana graničnog pravca. Za definiranje strane poluravnine koristi se probna točka T(a,b) koja ne pripada pravcu $Ax + By = C$. Ukoliko ona zadovoljava nejednadžbu onda je strana na kojoj se ona nalazi strana rješenja, u protivnom je rješenje na drugoj strani.

Moguća rješenja se nalaze unutar prostora omeđenog zadanim ograničenjima. Najčešće optimalna rješenja leže u vrhovima, osim kada se poklope granični pravci i funkcije cilja. U tom slučaju dva vrha i sve točke na pravcu između dva vrha daju isto optimalno rješenje. Vrhovi određenog područja izvedivosti se nalaze unutar tog područja, na presjecištu dvaju graničnih pravaca.[5]

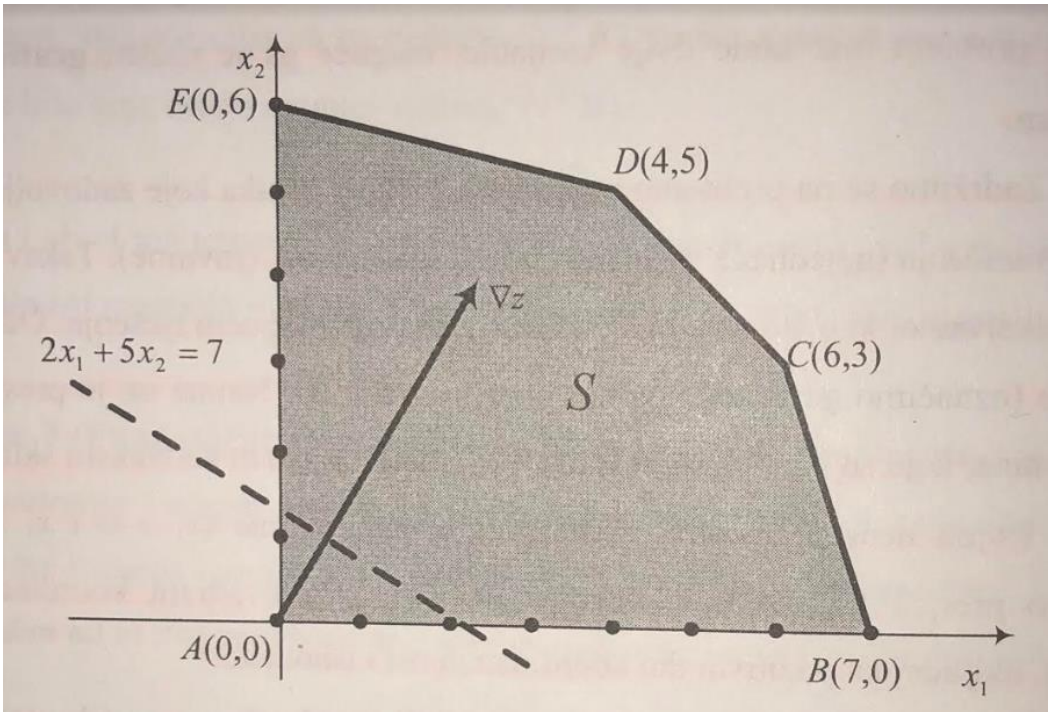
[5] Pašagić, H., (2003.), Matematičke metode u prometu, Zagreb, str., 39.

U slučaju uvjeta nenegativnosti rješenje su dvije poluravnine tj. ono je unutar prvog kvadranta koordinantnog sustava koji omeđuje pozitivni dio koordinatnih osi i ishodište istoga. U tom slučaju se ostale poluravnine nalaze ispod ili iznad odgovarajućih pravaca. Tada se kaže da je rješenje konveksni poliedar kojem su ekstremne točke definirane kao sjecište pravaca (hiperravnine). Opisano se može prikazati kao na slici 3 u nastavku, a odraz je prezentiranog primjera ranijeg podnaslova rada.

Svaka točka iz skupa S (kao i rubne točke) zadovoljavaju uvjete ograničenja te ih ima beskonačno mnogo. Zadatak linearnog programiranja je determinirati jednu točku (ili više njih) koje ostvaruju funkciju cilja tj. maksimiziraju, odnosno minimiziraju funkciju cilja.

Ukoliko se sa slike temeljem ranijeg primjera razmotri optimalno rješenje tada se uviđa da je to točka D jer je u njoj funkcija cilja 33. U ostalim rubnim točkama je ona manja kao i u točkama ispod ruba ravnine.

Slika 3: Grafički prikaz rješenja primjera



Izvor: Babić, Z. (2011), Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 80.

2.3.2. Simpleks metoda

Simpleks metoda je jedna od najčešće korištenih i najpoznatijih metoda za rješavanje problema linearnog programiranja.

Za provođenje simpleks metode linearnog programiranja nužno je standardni problem prebaciti u ekvivalentni kanonski problem u kojem će sva ograničenja biti u obliku jednadžbi i sve varijable ograničene na nenegativnu vrijednost, odnosno vrijednost svake varijable mora biti veća od nule. Kanonski oblik se ostvaruje uvođenjem novih, tzv. dopunskih ili dodatnih varijabli. Procedura je sljedeća:[6]

1) ograničenje tipa ″≤″ se konvertira u jednakost pribrajajući lijevoj strani dopunsku varijablu x_k i uvjet da ona bude nenegativna,
2) ograničenje tipa ″≥″ se konvertira u jednakost oduzimajući lijevoj strani dodatnu varijablu x_l i uvjet da ona bude nenegativna.

Standardni problem maximuma ima oblik :[7]

$$\max z = c_1x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_j \geq 0,\ i = 1\ldots, m \quad j = 1\ldots, n$$

Svakom problemu maksimizacije, odnosno minimizacije, korespondira problem minimizacije, odnosno maksimizacije, koji se zove dual originalnog problema. Originalni problem je tzv. primal. Dual standardnog problema maximizacije je standardni problem minimizacije koji se u slučaju ranije prikazano problema maksimizacije dobiva:[8]

[6] Babić, Z. (2011), Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 123.

[7] Pašagić, H., (2003.), Matematičke metode u prometu, Zagreb, str., 47.

[8] Ibidem, str. 48.

$$\min z' = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n$$

$$b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \geq c_1$$

$$b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n \geq c_2$$

$$b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \ldots + b_{mn}y_n \geq c_m$$

$$y_j \geq 0,\ i = 1\ldots, m \quad j = 1\ldots, n$$

Vrijedi i obratno, odnosno, ako je primal standardni problem minimizacije tada je njegov dual standardni problem maximizacije.

Postoje tri osnovna teorema LP.

Teorem 1: Ako je X moguće rješenje primala (maximizacije) i Y moguće ješenje duala (minimizacije) tada je $C^TX \leq B^TY$ (C^TX je vrijednost ciljne funkcije za prihvatljivo rješenje X a B^TY je vrijednost ciljne funkcije za prihvatljivo rješenje Y).

Teorem 2: Ako su X* i Y* moguća rješenja primala (max) i duala (min) i ako je $C^TX^* = B^TY^*$ tada su X* i Y* optimalna rješenja tog para dualnih problema.

Teorem 3: (fundamentalni teorem dualiteta) Ako LP i njegov dual imaju moguća rješenja, tada imaju optimalno rješenje i vrijednosti ciljne funkcije tih rješenja su jednake u oba slučaja. Ako jedan od tih dvaju LP-a nema niti jedno prihvatljivo rješenje tada drugi nema optimalno rješenje. Ako je primal zadan kao standardni problem maximizacije to znači da će dual biti standardni problem minimizacije (sva ograničenja tipa « ≥ « i sve varijable nenegativne tj. ≥ 0). Vrijedi i obratno. Optimalno rješenje primala iščitava se iz optimalne tablice.

Optimalne vrijednosti, tj. rješenja varijabli odlučivanja, primala su jednake apsolutnim vrijednostima koeficijenata dopunskih varijabli u nultom retku optimalne tablice duala, a optimalna vrijednost ciljnih funkcija jednaka je u objema problema. Optimalne vrijednosti dopunskih varijabli poprimaju vrijednosti koje odgovaraju apsolutnim vrijednostima koeficijenata varijabli odlučivanja duala u nultom retku optimalne tablice duala.

U nekim slučajevima može biti lakše rješavati dual nego primal pa iz njega očitati rješenje primala. Moguća rješenja prikazana su u tablici 1.

Tablica 1: Odnosi među rješenjima

Rješenje primala	Rješenje odgovarajućeg duala
optimalno	Optimalno
neograničeno	nemoguće (nema niti jednog dopuštenog rješenja)
nemoguće	Neograničeno

Izvor.: Izrada autorice

Optimalno rješenje se postiže samo kada su resursi najbolje alocirani, odnosno u slučaju kada je ukupan prihod jednak ukupnoj vrijednosti resursa. Sustav je neoptimalan sve dok vrijednost resursa tj. input premašuje prinos. Model je stabilan onda kada su te dvije veličine jednake.
J-ta dualna varijabla y_j odgovara j-tom ograničenju iz primala i predstavlja iznos novčanih jedinica po jedinici resursa. Zove se j-ta dualna cijena (cijena jedinice j-tog resursa). Ona u stvari ima vrijednost iznosa za koji će se poboljšati vrijednost funkcije cilja primala (z) kada desna strana j-tog ograničenja primala naraste za 1, a sve ostale veličine ostanu nepromijenjene.[9]

2.4. Kanonski problem i njegovo rješenje simpleks metodom

Kanonski problem LP odlikuje to da ima sva ograničenja (izuzev uvjeta nenegativnosti) u obliku jednadžbi. To ga čini pogodnim za primjenu različitih metoda rješavanja problema linearnog programiranja. Kanonski problem linearnog programiranja za problem maksimuma se prikazuje kao:[10]

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, x_j = b_j\,, i = 1,2,\dots,m$$

[9] Ibidem, str. 50.
[10] Babić, Z., (2011.), Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 73.

i uvjet:

$x_j \geq 0$, j=1,2,…n

što se u matričnom obliku može zapisati kao:

Max $C^T X$

AX=B

$X \geq 0$

Kanonski oblik problema LP za minimum je jednak kanonskom obliku modela LP za maksimum. Razlika je u funkciji cilja tj. u kojoj se „Max" zamjenjuje s izrazom za minimiziranje tj. „Min". Standardni i kanonski problem su ekvivalentni, pa se jednostavno transformiraju jedan u drugi što ujedno znači da se rješavanjem jednog od njih može dobiti i rješenje drugog. Kako bi se standardni problem mogao transformirati u kanonski važno je nejednadžbu

$AX \leq B$

konvertirati u jednadžbu, nadodavanjem dodatne varijable na lijevu stranu, oblika:

$AX + U = B$

uz uvjet

$U \geq 0$

U izrazu je vektor U vektor dodatnih tj. oslabljenih varijabli, dok se komponente vektora X nazivaju strukturnim varijablama. Vektor U u modelu LP ima nenegativnu vrijednost te je formata (m, 1). Koeficijenti dopunskih varijabli u funkciji cilja su nula, što znači da nemaju utjecaj na određivanje optimalnog rješenja, pa se i izostave u funkciji cilja.[11]

Primjerice, ako je zadan problem maksimuma linearnog programiranja:

[11] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 89

$Max(5x_1+6x_2)$

$-2x_1+3x_2 \leq 6$

$x_1+x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

Dodavanjem dopunskih varijabli problem se prebacuje u kanonski oblik te uvjeti postaju jednadžbe:

$Max(5x_1+6x_2+0u_1+0u_2)$

$-2x_1+3x_2+u_1 = 6$

$x_1+x_2 + u_2 = 7$

$x_1, x_2, u_1, u_2 \geq 0$

Nakon konverzije modela formira se simpleks tablica prikazana u tablici 2:

Tablica 2: Početna simpleks tablica primjera

	Cj	**5**	**6**	**0**	**0**	
cj	**Baza**	**A1**	**A2**	**U1**	**U2**	**A0**
0	U1	-2	3	1	0	6
0	U2	1	1	0	1	7
	zj-cj	**-5**	**-6**	**0**	**0**	**0**

Izvor: Izrada autorice

U tablicu su uneseni koeficijenti funkcije cilja, ograničenja te koeficijenti uvjeta. Prvo bazično rješenje je da je $x_1=0$, $x_2=0$, $u_1=6$, $u_2=7$, $z=0$

Sustav jednadžbi se može napisati u obliku:

$A_0=x_1A_1+ x_2A_2+ u_1U_1+ u_2U_2,$

iz zadnjeg stupca simpleks tablice se može iščitati:

$A_0=0A_1+ 0A_2+ 6U_1+ 7U_2,$

usporedbom tih dvaju relacija dobija se prvo bazično rješenje:

$x_1=0$, $x_2=0$, $u_1=6$, $u_2=7$, s funkcijom cilja $z=0$

S obzirom na konačne vrijednosti simpleks tablice vidljivo je da će uvođenjem varijabli funkcija cilja rasti. Najprije se uvodi x_2, te se dobija drugo, a uvođenjem x_1 treće bazično rješenje koja glase:

$x_1=0$, $x_2=2$, $u_1=6$, $u_2=5$, $z=12$
$x_1=3$, $x_2=4$, $u_1=0$, $u_2=0$, $z=39$

S obzirom da treće bazično rješenje daje najveću vrijednost funkcije cilja z ono se naziva optimalnim rješenjem. Izračun drugog i trećeg bazičnog rješenja temeljem Gauss-Jordanovim formulama eliminacije dan je u tablici u tablici 3.

Tablica 3: Simpleks tablica primjera s optimalnim rješenjem

	Cj	**5**	**6**	**0**	**0**	
cj	**Baza**	**A1**	**A2**	**U1**	**U2**	**A0**
0	U1	-2	3	1	0	6
0	U2	1	1	0	1	7
	zj-cj	**-5**	**-6**	**0**	**0**	**0**
6	A2	-0,66667	1	0,33	0	2
0	U2	1,67	0	-0,33	1	5
	zj-cj	**-9**	**0**	**2**	**0**	**12**
6	A2	0	1	0,20	0,40	4
5	A1	1	0	-0,20	0,60	3
	zj-cj	**0**	**0**	**0,20**	**5,40**	**39**

Izvor: Izrada autorice

3. RAZRADA PROBLEMA PROIZVODNJE SLADOLEDA

U ovom dijelu rada definirat će se problematika proizvodnog procesa Tvornice Ledo d.o.o.. Linearno programiranje se rješava putem programa WinQSB, putem kojeg će se uz postavljene zadatke prikazati proizvodni proces u tvornici.

3.1. Primjena programa WinQSB

WinQSB je programski alat za poslovanje, koji se sastoji od ukupno 19 aplikacijskih modula, što mu omogućuju primjenu pri rješavanju znatnog broja različitih problema. Neki od 19 aplikacijskih modula su: modul za nelinearno programiranje, modul za linearno programiranje, modul za planiranje proizvodnih resursa, za izradu plana proizvodnje i drugi.

WinQSB je alat koji ima za cilj olakšati rad u donošenju poslovnih odluka, te se kao takav koristi i u prijevoznoj logistici. Program je podijeljen u niz modula koji će pomoći u različitim vrstama odlučivanja. Dakle, jedan namjenski za rješavanje linearnih problema definiranim ciljevima, jedan za analizu odluke, pa čak i jedan posebno posvećen skrivenom Markovljevom modelu. Bez obzira na potrebe na razini odlučivanja u radnim skupinama ili malim i srednjim poduzećima, WinQSB nudi rješenje.[12]

Da bi se moglo pristupiti rješavanju određenoga problema pomoću linearnoga i cjelobrojnoga linearnoga programiranja, nakon pokretanja računalnoga programa WinQSB potrebno je pokrenuti aplikacijski modul za linearno i cjelobrojno linearno programiranje klikom na aplikacijski model.

[12] Prcela M.(2010): Predstavljanje znanja zasnovanog na integraciji ontologija i Bayesovih mreža, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, str. 22.

3.2. Proces korištenja WinQSB programa

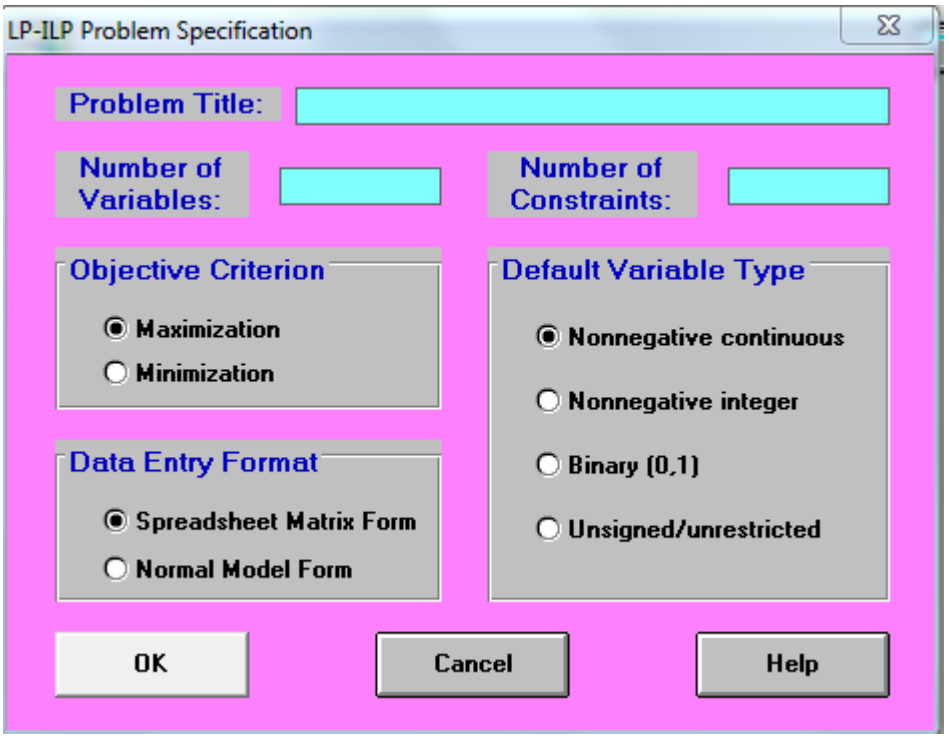
U ovom dijelu rada definirat će se svi koraci pri korištenju programa WinQSB koji nam je potreban u ovom radu kako bi prikazali rezultate i problematiku proizvodnog procesa u tvornici Ledo d.o.o.

Proces korištenja:[13]

- nakon pokretanja računalnoga programa WinQSB potrebno je pokrenuti aplikacijski modul za linearno i cjelobrojno linearno programiranje klikom na aplikacijski model,
- Nakon pokretanja potprograma Linear and Integer Programming kliknemo na „File“ i odaberemo opciju „New Problem“,
- U pravokutnik pored natpisa Problem Title treba upisati naziv problema. U pravokutnik pored natpisa Number of Variables treba upisati ukupan broj nezavisnih varijabli, a u pravokutnik pored natpisa Number of constrains treba upisati ukupan broj uvjeta.
- Unaprijed zadane postavke su Maximization, Spreadsheet Matrix Form i Nonnegative continuous. U praksi se, naime, najčešće javljaju problemi maksimizacije funkcije cilja čije su varijable nenegativni realni brojevi. Zapis funkcije cilja i uvjeta u matričnom obliku lakši je i pregledniji od zapisa u „običnom“ tabličnom obliku.
- U retku Variable upisani su nazivi nezavisnih varijabli. WinQSB pretpostavlja da su varijable označene oznakama X1, X2 itd. U retku Maximize/Minimize treba upisati koeficijente funkcije cilja tako da prvi koeficijent bude onaj uz varijablu X1, drugi onaj uz varijablu X2 itd.
- Klikom na opciju „Edit“ u glavnom izborniku otvara se padajući izbornik koji nudi opcije za preimenovanje varijable, dodavanje novih uvjeta, brisanje postojećih uvjeta, dodavanje novih varijabli i brisanje postojećih varijabli,
- Opciju za rješavanje problema moguće je odabrati klikom na izbornik „Solve and Analyze“ i odabirom opcije „Solve the Problem“,
- Program izbaci rezultate.

[13] Prema postavljenim uputama.

- Ovim je završen pregled osnovnih opcija potprograma Linear and Integer Programming. Korištenje tih opcija u rješavanju konkretnih primjera pokazat ćemo u sljedećem poglavlju.



Slika 4: Korisničko sučelje programa WinQSB, potprograma Linear and Integer Programming.

3.3. Definiranje i formuliranje modela na primjeru proizvodnje sladoleda

Model linearnog programiranja u proizvodnji može se primijeniti na više problema, pa se tako na primjer mogu minimizirati troškovi proizvodnje uzimajući u obzir troškove proizašle iz cijena sirovina, ili se može maksimizirati profit tvornice na temelju dobivene količine proizvoda i utrošenih sirovina. Također, može se odrediti i optimalan redoslijed proizvodnje pojedinih proizvoda s obzirom na njihovu potražnju.[14]

U ovom radu predstavljen je model linearnog programiranja na primjeru proizvodnje King sladoleda Tvornice Ledo d.o.o.

Budući da je Ledo danas najveći domaći proivođač industrijskog sladoleda u Hrvatskoj upravo je on izabran za primjer u ovom radu.

[14] Omrčen S.(2017): Optimiranje poslovnog procesa u pekarskoj proizvodnji, Ekonomski fakultet u Splitu, Split.

Tvornica Ledo neprestano radi na uvođenju modernih tehnologija i usavršavanju proizvodnih procesa, spaja tradiciju s najnovijom tehnologijom te konstantno zadržava najviše moguće standarde na području distribucije i kvalitete.

Ledo nudi širok asortiman proizvoda – od sladoleda, smrznutog voća i povrća do smrznutih riba, tijesta, gotovih jela i mesa, koji se kontinuirano nadopunjuju novim inovativnim proizvodima prema zahtjevima Ledovih potrošača.

S obzirom da se tvornica bavi proizvodnjom širokog asortimana proizvoda, radi jednostavnosti obrade podataka u radu je prikazan model na proizvodnji sladoleda King i to na 5 artikla: *King Experience Sladoled, King Double Sladoled, King Temptation Sladoled, Sladoled King kokos i King Classic Sladoled* (tablica 4.).

U tablici su prikazani i podatci kao što je težina proizvoda u kilogramima, gornja i donja granica njihove tjedne proizvodnje, prodajne cijene proizvoda po komadu u koje je uključen i PDV, trošak sirovina po komadu proizvoda, te razlika između prodajne cijene proizvoda i troška sirovina odnosno prihod po komadu proizvoda.

Podaci koji su korišteni u radu nisu stvarni podaci dobiveni iz proizvodnog procesa Tvornice Ledo d.o.o., ali su približni stvarnim podacima.

Tablica 4: Popis artikala - proizvoda

Oznaka	Šifra artikla	Naziv artikla	Težina u g	Tjedna količina proizvodnje u tisućama (gornja i donja)	Prodajna cijena po komadu	Trošak sirovine po komadu	Prihod
A1	01	King Experience Sladoled	85	20 - 30	10	3,83	6,17
A2	02	King Double Sladoled	95	20 - 30	10	3,85	6,15
A3	03	King Temptation Sladoled	90	10 - 30	12	4,33	7,67
A4	04	Sladoled King kokos 110 ml	85	10 – 25	12	4,43	7,57
A5	05	King Classic Sladoled	80	10 – 21	10	3,77	6,23

Izvor: izrada autorice, podaci približno odgovaraju stvarnim podacima, nisu relevantni za Tvrtku Ledo d.o.o.

U nastavku, tablica 5. prikazuje popis korištenih sirovina potrebnih za proizvodnju proizvoda navedenih u tablici 4., te njihove cijene po gramu i kilogramu.

Tablica 5: Popis korištenih sirovina

Oznaka	Šifra	Naziv sirovine	Cijene (u kn) po 1 kg	Cijena (u kn) po 1g
S1	101	čokolada	89.8	0,0898
S2	102	Šećer	5,2	0,0052
S3	103	Maslac	73,4	0,0734
S4	104	Obrano mijeko u prahu	9,30	0,0093
S5	105	Voda	0,56	0,00056
S6	106	Glukozni sirup	38,5	0,0385
S7	107	Aroma	98.9	0,0989
S8	108	Preljev od lješnjaka	44,5	0,0445
S9	109	Preljev od pistacija	53,5	0,0535
S10	110	Komadići lješnjaka	65,5	0,0655
S11	111	Pasta okusa pistacije	55,5	0,0555
S12	112	Pasta lješnjak	45,5	0,0455
S13	113	Kakao preljev	47,5	0,0475
S14	114	Preljev okusa vafla	38,6	0,0386
S15	115	Punjenje okusa karamele	40,5	0,0405

S16	116	Pasta okusa bijele čokolade	50,5	0,0505
S17	117	Želatina	458	0,458
S18	118	Pripravak okusa čokolade s komadićima kokosa	93,5	0,0935
S19	119	Kokos pasta	56,8	0,0568
S20	120	Komadići kokosa	55,6	0,0556
S21	121	Žumanjak jaja u prahu	86,5	0,0865
S22	122	Ekstrakt vanilije	589,9	0,5899

Izvor: izrada autorice, podaci približno odgovaraju stvarnim podacima, nisu relevantni za Tvrtku Ledo d.o.o.

U tablici 6. prikazane su količine sirovina u gramima utrošene po jedinici proizvoda, a tablica se sastoji od 5 artikala i 22 sirovine. Iz tablice je vidljivo da za proizvodnju, npr. sladoled King kokos (A4) potrebno utrošiti: 24 grama čokolade (S1), 5 grama šećera (S2), zatim 2 grama maslaca (S3) 2 grama obranog mlijeka u prahu (S4), 2 grama vode (S5), 5 grama glukoznog sirupa (S6), 5 grama arome (S7), 16 grama želatine (S17), 5 grama kokos paste (S19) te 19 grama komadića kokosa (S20).

	A1	A2	A3	A4	A5
S1	24	24	24	24	24
S2	5	5	5	5	5
S3	2	2	2	2	2
S4	2	2	2	2	2
S5	2	2	2	2	2
S6	5	5	5	5	5
S7	5	5	5	5	5
S8	1	17			
S9	9				
S10	3		3		
S11	2				
S12	8	25	12		
S13	1	8			
S14			18		
S15			8		
S16			2		
S17				16	
S18			1		
S19				5	
S20				19	
S21					24
S22					6

Tablica 6: Količina sirovina (u gramima) po jedinici proizvoda

Izvor: izrada autorice, podaci su fiktivni, nisu relevantni za Tvrtku Ledo d.o.o.

Nakon određivanja, odnosno definiranja svih potrebnih podataka potrebnih za rješavanje problema linearnog programiranja, možemo postaviti i model. Funkcija cilja u modelu koju je potrebno maksimizirati ima oblik:

$$\text{Max } Z = 6{,}17x1 + 6{,}15\ x2 + 7{,}76x3 + 7{,}57x4 + 6{,}23x5$$

Količine sirovina koje će se koristiti u ovom modelu kao ograničenja, predstavljaju fiktivne količine dobivenih iz proizvodnog procesa Tvornice Ledo d.o.o u promatranom razdoblju od jednog tjedna.

Raspoloživa količina za čokoladu (S1) iznosi 2800000 g, pa je ograničenje:

$$\mathbf{S_1} \qquad 24x1 + 24x2 + 24x3 + 24x4 + 24x5 \leq 2800000$$

Dakle, sustav ograničenja za sve ostale sirovine će imati sljedeći oblik:

$\mathbf{S_2}$ $5x1 + 5x2 + 5x3 + 5x4 + 5x5 \leq 1200000$

$\mathbf{S_3}$ $2x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 + 2x5 \leq 600000$

$\mathbf{S_4}$ $2x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 + 2x5 \leq 900000$

$\mathbf{S_5}$ $2x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 + 2x5 \leq 900000$

$\mathbf{S_6}$ $5x1 + 5x2 + 5x3 + 5x4 + 5x5 \leq 700000$

$\mathbf{S_7}$ $5x1 + 5x2 + 5x3 + 5x4 + 5x5 \leq 700000$

$\mathbf{S_8}$ $1x1 + 17x2 \leq 800000$

$\mathbf{S_9}$ $9x1 \leq 300000$

$\mathbf{S_{10}}$ $3x1 + 3x3 \leq 200000$

$\mathbf{S_{11}}$ $2x1 \leq 60000$

$\mathbf{S_{12}}$ $8x1 + 25x2 + 12x3 \leq 1350000$

$\mathbf{S_{13}}$ $1x1 + 8x2 \leq 600000$

$\mathbf{S_{14}}$ $18x3 \leq 600000$

$\mathbf{S_{15}}$ $8x3 \leq 300000$

$\mathbf{S_{16}}$ $2x3 \leq 60000$

$\mathbf{S_{17}}$ $16x4 \leq 480000$

$\mathbf{S_{18}}$ $1x3 \leq 100000$

$\mathbf{S_{19}}$ $5x4 \leq 150000$

$\mathbf{S_{20}}$ $19x4 \leq 400000$

$\mathbf{S_{21}}$ $24x5 \leq 500000$

$\mathbf{S_{22}}$ $6x5 \leq 180000$

Relacije S3, S4 i S5 nisu sve potrebne. Naime, ako je isti izraz (2x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 + 2x5) manji od 600.000, onda je zasigurno manji i od 900.000. Dakle, navedene relacije mogu se svesti na jednu:

$$2x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 + 2x5 \leq 600000$$

Isto pravilo vrijedi i za S2, S6 i S7.

Također, dijeljenjem prvih 7 relacija s 24, 5 ili 2 dobiva se jedna relacija.

$\mathbf{S_1}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 116666,667$

$\mathbf{S_2}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 240000$

$\mathbf{S_3}$ $x1 + x2 + x3 + 2x4 + x5 \leq 300000$

$\mathbf{S_4}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 450000$

$\mathbf{S_5}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 450000$

$\mathbf{S_6}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 140000$

$\mathbf{S_7}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 140000$

Možemo zaključiti da se navedenih 7 relacija može prikazati jednom, odnosno:

$\mathbf{S_1}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 116666,667$

Pojednostavljenjem modela kao što je prikazano, dobijemo da se 22 ograničenja, možemo svesti na 5 jednostavnih:

$\mathbf{S_1}$ $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \leq 116666,667$

$\mathbf{S_{11}}$ $x1 \leq 30000$

$\mathbf{S_{16}}$ $x3 \leq 30000$

$\mathbf{S_{20}}$ $x4 \leq 21052,63$

$\mathbf{S_{21}}$ $x5 \leq 20833,33$

Potrebno je napomenuti da se u daljnjem koraku, tj. prilikom unošenja relacije S11, S16, S20 i S21 ne unose kao posebne relacije, nego kao gornje ograde.

Nakon što smo uveli ograničenja količine sirovina, potrebno je uvesti i ograničenja minimalne i maksimalne količine proizvodnje. Određivanje granice minimalne količine proizvodnje određenog proizvoda je bitno kako ne bi došlo do isključenja proizvodnje onih proizvoda koji donose minimalnu dobit, tj. kako ne bi došlo do proizvodnje samo onih proizvoda koji donose maksimalnu dobit, već kako bi došlo do optimalne razine proizvodnje i iskorištenosti resursa.

Kako je rečeno, u radu su korišteni fiktivni podatci na primjeru Tvornice Ledo d.o.o, a na temelju iskustva definirana je donja i gornja razina tjedne proizvodnje koja je prikazana u tablici 4., pa tako vrijedi:

Za proizvod x_1, odnosno sladoled King Experience:

$$20.000 \leq x_1 \leq 30.000$$

gdje je minimalna tjedna proizvodnja 20.000 komada, a maksimalna 30.000 komada King Experience sladoleda.

Ograničenja za minimalnu i maksimalnu proizvodnju ostalih proizvoda imaju sljedeći oblik:

$$20.000 \leq x_2 \leq 30.000$$

$$10.000 \leq x_3 \leq 30.000$$

$$10.000 \leq x_4 \leq 25.000$$

$$10.000 \leq x_5 \leq 21.000$$

Uz navedena ograničenja vezana za količine sirovina i proizvodnju, također treba navesti i uvjete nenegativnosti:

$$x_j \geq 0 \ , \ j = 1,2,3,4,5$$

Nakon postavljanja funkcije cilja, te određivanja ograničenja vezana za količinu sirovina i njihovu proizvodnju, potrebno je sve te vrijednosti unijeti u program WinQSB (Quantitive Systems for Business).

Uz pomoć računala i korištenjem WinQSB programa moguće je dobiti rješenje ovog linearnog problema ali samo korištenjem opcije INTEGER. Kada se sve vrijednosti i ograničenja unesu u program, dobije se tablica ulaznih podataka prikazana na slici 5.

Slika 5: Ulazni podaci u program WinQSB

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize	6.17	6.15	7.76	7.57	6.23		
C1	1	1	1	1	1	<=	116666.7
C2	1	17				<=	800000
C3	3		3			<=	200000
C4	8	25	12			<=	1350000
C5	1	8				<=	600000
LowerBound	10000	10000	15000	10000	10000		
UpperBound	30000	M	30000	21052.63	20833.33		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Izvor: računalni program WinQSB

Nakon unesenih svih podataka, u programu su izračunata optimalna rješenja koja su prikazana na slici 5.

Slika 6: Optimalno rješenje

	12:45:58		Thursday	August	29	2019		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[j]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[j]	Allowable Max. c[j]
1	X1	30.000,0000	6,1700	185.100,0000	0	basic	6,1500	M
2	X2	14.780,7400	6,1500	90.901,5600	0	basic	0	6,1700
3	X3	30.000,0000	7,7600	232.800,0000	0	basic	6,1500	M
4	X4	21.052,6300	7,5700	159.368,4000	0	basic	6,1500	M
5	X5	20.833,3300	6,2300	129.791,6000	0	basic	6,1500	M
	Objective	Function	(Max.) =	797.961,6000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	116.666,7000	<=	116.666,7000	0	6,1500	111.886,0000	131.886,0000
2	C2	281.272,6000	<=	800.000,0000	518.727,4000	0	281.272,6000	M
3	C3	180.000,0000	<=	200.000,0000	20.000,0000	0	180.000,0000	M
4	C4	969.518,6000	<=	1.350.000,0000	380.481,4000	0	969.518,6000	M
5	C5	148.245,9000	<=	600.000,0000	451.754,1000	0	148.245,9000	M

Izvor: računalni program WinQSB

U tablici na slici 5. dobili smo optimalno rješenje, odnosno optimalne vrijednosti količine proizvodnje za svaki pojedini proizvod. Optimalna količina proizvodnje za svaku vrijednost proizvoda x_j je sljedeća:

$x_1 = 30.000,000$

$x_2 = 14.780,740$

$x_3 = 30.000,000$

$x_4 = 21.052,630$

$x_5 = 20.833,330$

Funkcija cilja koja predstavlja ukupnu dobit pri proizvodnji optimalne količine proizvoda iznosi 797.961,600 kn.

Nakon što smo dobili optimalnu količinu proizvodnje, te na temelju postavljenih ograničenja, možemo zaključiti da optimalna količina proizvodnje proizvoda x_1, x_3 i x_5 odgovara maksimalnoj količini tjedne proizvodnje prema dobivenim podacima, a optimalna količina proizvoda x_2 i x_4 odgovara srednjoj razini tjedne proizvodnje.

Vrijednost dopunskih varijabli pokazuje jesu li sirovine u potpunosti iskorištene. Ako su sirovine u potpunosti iskorištene tada je njihova vrijednost jednaka nuli, a ako je vrijednost varijable veća od nula tada imamo višak. Budući da su sva ograničenja u navedenom primjeru oblika $\leq$, vrijednosti dopunskih varijabli ne smiju biti manje od nula. Radi jednostavnosti od ukupnih sirovina u programskog paketu izračunata je vrijednost dopunskih varijabli za prvih pet sirovina koje su baza u svih 5 artikala.

Vrijednosti dopunski varijabli su:

u1 = 0, znači da je potrebna količina sirovine (S1) – čokolade u potpunosti iskorištena.

u2 = 518.727 znači da je potrebna količina šećera (S2) manja za 518.727 g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 518.727,400 g šećera.

u3 = 20.000, znači da je potrebna količina maslaca (S3) manja za 20.000 g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 20.000 g maslaca.

u4 = 380.481 znači da je potrebna količina obranog mlijeka u prahu manja za 380.481 g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 380.481 g obranog mlijeka u prahu.

u5 = 451.754, znači da je potrebna količina vode manja za 451.754 g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 451.754 g vode.

4. ZAKLJUČAK

Poduzeća koje se bave proizvodnjom te koja konkuriraju sa svojim proizvodima na tržištu susreću se s brojnim pitanjima među kojima se kao temeljno ističe - kako poslovati na što efikasniji način, odnosno kako minimizirati vlastite troškove i maksimizirati profit. U ovom radu smo pokazali kako se primjenom linearnog programiranja može postići optimizacija poslovnog procesa u proizvodnji sladoleda.

Primjenom linearnog programiranja uspješno je postavljen proizvodni model koji daje optimalne količine proizvoda za taj slučaj. Na temelju dobivenih rezultata možemo zaključiti da optimalna količina proizvodnje proizvoda x_1, x_3 i x_5 odgovara maksimalnoj količini tjedne proizvodnje prema dobivenim podacima, a optimalna količina proizvoda x_2 i x_4 odgovara srednjoj razini tjedne proizvodnje.

Također veliki broj sirovina nije iskorišten u potpunosti. Funkcija cilja koja predstavlja ukupno dobit iznosi 797.961,600 kn.

Može se zaključiti da primjena linearnog programiranja u poslovanju poduzeća utječe na efikasniju proizvodnju, a time i ostvarenju većeg profita. Stoga, tvrtke bez obzira na djelatnost, bi trebale primjenjivati metode linearnog programiranja u cjelokupnoj organizaciji poduzeća kako bi postigle bolje rezultate poslovanja.

LITERATURA

1. Babić, Z. (2011), Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu
2. LEDO plus d.o.o. 2019.: Profil Leda, raspoloživo na http://www.ledo.hr/hr/o-nama/ledo-danas [01.09.2019]
3. Mirković, D. (1963.): Osnovi linearnog programiranja, Zavod za produktivnost rada, Sarajevo
4. Omrčen S.(2017): Optimiranje poslovnog procesa u pekarskoj proizvodnji, diplomski rad, Ekonomski fakultet u Splitu, Split
5. Pašagić, H., (2003.), Matematičke metode u prometu, Fakultet prometnih znanosti Zagreb
6. Prcela M.(2010): Predstavljanje znanja zasnovanog na integraciji ontologija i Bayesovih mreža, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, str. 22
7. Šercer M. (2016): POSLOVNO ODLUČIVANJE TEMELJENO NA POZNAVANJU INFORMACIJA IZ MREŽNOG SUČELJA, Ekonomski fakultet u Osijeku

POPIS SLIKA

Slika 1: Prikaz matrice i vektora koji se nalaze u matričnom obliku problema 5

Slika 2. Prikaz matrice i vektora od kojih se problem formira 6

Slika 3: Grafički prikaz rješenja primjera 8

Slika 4: Korisničko sučelje programa WinQSB, potprograma Linear and Integer Programming. 17

Slika 5: Ulazni podaci u program WinQSB 27

Slika 6: Optimalno rješenje 27

POPIS TABLICA

Tablica 1: Odnosi među rješenjima 11

Tablica 2: Početna simpleks tablica primjera 13

Tablica 3: Simpleks tablica primjera s optimalnim rješenjem 14

Tablica 4: Popis artikala - proizvoda 19

Tablica 5: Popis korištenih sirovina 20

SAŽETAK

U uvodnom dijelu opisan je razlog primjene linearnog programiranja, definiran je oblik rada te cilj i metode koje rad koristi.

U drugom dijelu definiran je pojam i razvoj tehnika linearnog programiranja, načini na koje se određuje problem linearnog programiranja te odrednice definiranja modela linearnog programiranja. Također, objašnjene su metode rješavanja problema linearnog programiranja te kanonski oblik i njegovo rješenje simpleks metodom.

U trećem odnosno praktičnom dijelu rada riješen je model proizvodnje na primjeru proizvodnje ledovih King sladoleda, uz primjenu računalnog programa WinQSB, u kojemu se ostvaruje maksimalna dobit.

U četvrtom dijelu donosi se zaključak u kojemu je dat pregled cjelokupnog rada i osvrt na dobivene rezultate.

KLJUČNE RIJEČI:

-linearno programiranje

-proizvodnja sladoleda

-računalni program WinQSB

SUMMARY

In the introduction, reason for use of linear programming is explained. Also form of this paper, methods that are used in it and its objective are defined.

Second part describes linear programming concept and development of used tehniques. Also methods of defining the problem chosing the method. After defining the problem and ways to select the method, some of these methods are described in more detail. To condlude canonical form and its solution using simplex method are explained.

Third part is where linear programming is applied to practical problem. Production model is resolved using production of Ledo's King icecreams as the example. As part of solution WinQsb software is used to achieve maimum possible gain.

Fourth and last part conclusion is made based on the achieved results and overview of the complete paper is made.

KEY WORDS:

-linear programming

-ice cream production

-computer program WinQSB