PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROIZVODNJI ULJA

Šuta, Roko

SVEUČILIŠTE U SPLITU

EKONOMSKI FAKULTET SPLIT

ZAVRŠNI RAD

PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROIZVODNJI ULJA

Mentor: **Student:**

Prof.dr.sc. Zoran Babić **Roko Šuta**

Split, rujan 2019.

SADRŽAJ

1. UVOD

Poslovno odlučivanje kompleksni je proces koji se temelji na nizu rješenja i alata od metoda analize do samih tehnoloških aplikacija koje olakšavaju procese procjene, selekcije i donošenja odluka. Sustav potpore odlučivanju u poduzeću najefektivniji je način upravljanja poslovnim procesima i odlukama. Tehnološka rješenja baziraju se na metodama poslovnog odlučivanja iz domene matematike i samog linearnog programiranja kao dijela iste.

Linearno programiranje, je dakle, dio kvantitativnih metoda kojeg definira skup tehnika koje se koriste kod rješavanja poslovnih problema, te su podrška poslovnom odlučivanju. Donošenje poslovnih odluka u proizvodnoj industriji temeljem metoda linearnog programiranja problematika je kojom se bavi ovaj rad.

Rad je oblikovan tako da se ističu dva dijela: teorijski i praktični. U teorijskom dijelu se definiraju osnovni pojmovi linearnog programiranja i pojašnjavaju teoremi na kojima se temelji, a u praktičnom se prikazuje primjena prezentiranih tehnika linearnog programiranja u praksi kroz donošenje odluka u proizvodnji ulja. Rad završava zaključkom koji daje osvrt na prezentirane spoznaje i dostignuća struke, u domeni poslovnog odlučivanja temeljenog na tehnikama linearnog programiranja, te iznesenih praktičnih primjera primjene linearnog programiranja u donošenju odluka u proizvodnji. Informacije u radu su prikupljene iz znanstvene literature, knjiga i članaka te predstavljaju sekundarne podatke kao i temeljem podataka u proizvodnji ulja te izradi modela i procesa donošenja poslovne odluke.

Cilj rada je prikaz praktičnosti i načine primjene alata linearnog programiranja u praksi, te koristi od donošenja poslovnih odluka primjenom tih alata. Doprinos rada je u jednostavnom prikazu osnovnih tehnika i uloge linearnog programiranja kod donošenja odluka u proizvodnoj industriji.

U izradi rada korištene su različite metode. Za pojašnjenje problematike rada i definiranja osnovnih pojmova, koristit će se deduktivna metoda. Ona se koristi za pojašnjenje osnovnih pojmova problematike poslovnog odlučivanja primjenom linearnog programiranja. Uz tu će se koristiti i induktivna metoda te metoda kauzalne indukcije. U izradi praktičnog dijela rada koristit će se metode linearnog programiranja kako bi se prikazala primjena istih u realnom sektoru u proizvodnji ulja.

2. POJAM I TEHNIKE KVANTITATIVNIH METODA

2.1. Pojam i razvoj linearnog programiranja

Kvantitativne metode obuhvaćaju različite alate koji su osnova donošenja procjena i odluka. Zbog raznovrsnosti i obuhvata te praktičnosti imaju široku primjenu. Linearno programiranje je dio matematičke grane koja se bavi problemom optimizacije sustava uz određena ograničenja. Kako živimo u svijetu uvjeta i ograničenja te uzročno posljedičnih relacija ispitivanje opcije prije izbora i donošenja odluka može značajno utjecati na ishod stoga je primjena neke od kvantitativnih metoda korisna.

Linearno programiranje je široko primjenjiva i relativno jednostavna metoda koja omogućuje analizu ishoda uz zadovoljenje niza različitih uvjeta stoga se u tome i krije njezina praktičnost i funkcionalnost. Linearno programiranje kao metodu odlučivanja je uveo Leonid Kantorovič pred kraj 1930-ih godina. Ova se metoda koristila prvenstveno kod rješavanja problema planiranja proizvodnje.

Metoda linearnog programiranja je razvijena tijekom Drugog Svjetskog rada u SAD-u[1] kada se koristila za probleme vojne logistike, poput optimiziranja prijevoza vojske i opreme konvojima. Važan je i doprinos ekonomista Tjallinga Koopmansa koji je 1975. u suradnji s Kantorovičem dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju za pionirski rad u linearnom programiranju.

Zaključno se može istaći da je linearno programiranje najvažnija i u praksi najviše korištena metoda optimizacije. Optimizacija je određivanje najboljeg rješenja uz određene uvijete. No, kako bi se neki problem mogao smatrati problemom linearnog programiranja (LP) on mora zadovoljavati tj. imati određene karakteristike o čemu je više riječ u nastavku.

[1] Pašagić, H.: Matematičke metode u prometu, Zagreb, 2003, str., 8.

2.2. Osnovne postavke linearnog programiranja

Funkcija koju želimo optimizirati (maksimizirati ili minimizirati) mora biti linearna. To znači da je moguće napisati je u obliku:[2]

$z = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ gdje su $a_1, \ldots, a_n$ konstante

Potonje definiran uvjet forme funkcije je tzv. kriterijalna funkcija, a varijable $x_1, \ldots, x_n$ varijable odlučivanja.

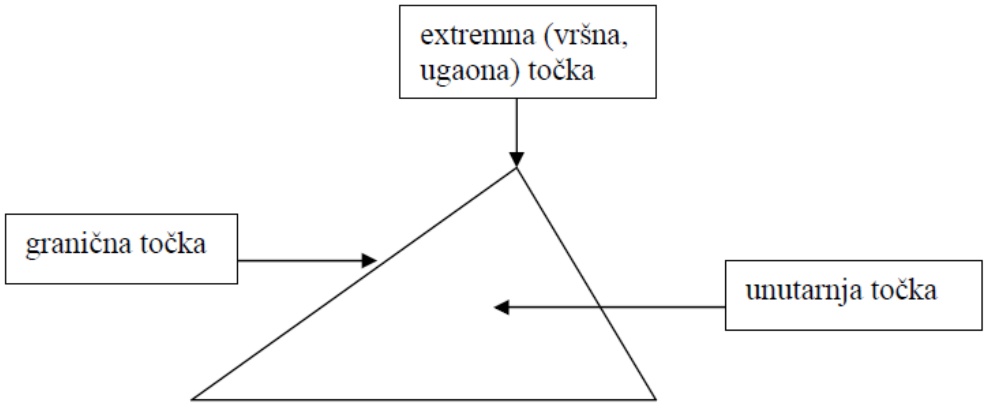
1. Vrijednosti varijabli odlučivanja moraju zadovoljavati skup ograničenja, koja moraju biti u formi linearnih jednadžbi ili nejednadžbi.

2. Neke varijable odlučivanja mogu imati ograničenje nenegativnosti (npr. $x_i \geq 0$)

Za rješavanje problema linearnog programiranja (LP), 1947. godine Dantzig je razvio jednu od najvažnijih i najpoznatijih kalkulativnih metoda poznatu kao simpleks procedura. Ova metoda definira tzv. dopustivo područje kojeg čini skup točaka (rješenja) koji zadovoljava sva ograničenja postavljena na varijable odlučivanja.

[2] Pašagić, H.: Matematičke metode u prometu, Zagreb, 2003, str., 10.

Slika 1: Područje linearnog programa



Izvor: Pašagić, H.: Matematičke metode u prometu, Zagreb, 2003, str. 10.

Kako bi se ova metoda razumjela bitno je poznavati i oblike rješenja. Moguće ili dopustivo rješenje je svako rješenje (točka) iz dopustivog područja. Vršno (ugaono, ekstremno) moguće rješenje je rješenje (točka) koja se ne nalazi na spojnici dva moguća rješenja. Dva vršna (ugaona, ekstremno) moguća rješenja su susjedna ako je njihova spojnica brid dopustivog područja.

Optimalno rješenje nekog linearnog programa je rješenje tj. točka iz dopustivog područja za koju funkcija cilja poprima najveću vrijednost kod problema maksimizacije odnosno najmanju kod problema minimizacije.

TEOREM

Ako postoji optimalno rješenje linearnog programa ono se nalazi u barem jednom vrhu (uglu, ekstremnoj točki) dopustivog područja. Kod definiranja rješenja važno je istaći moguće vrste istih.[3]

Četiri su moguće vrste rješenja LP-a:[4]

a) Oba problema imaju optimalno rješenje i optimalne vrijednosti funckije

[3] Pagašić, H., Matematičke metode u prometu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2003., str. 47.
[4] Babić, Z., Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, 2011., str 78.

b) Originalni problem nema moguće rješenje, pa dualni nema optimalno,

c) Originalni problem ima moguće, ali nema optimalno rješenje iz čega slijedi da dual nema moguće rješenje

d) Ne postoji rješenje ni na jednoj strani jer su uvjeti nekonzistentni, tj. sistemi nejednadžbi su u sebi kontradiktorni

2.3. Standardni problem

Standardni problem u linearnom programiranju je problem maksimuma ili problem minimuma. To ovisi u koju svrhu i u kojoj domeni se primjenjuje linearno programiranje kao i o samoj industriji u kojoj se primjenjuje. Ciljevi minimizacije i maksimizacije se koriste u proizvodnji kada se želi minimizirati troškove ili maksimizirati prodaju i sl. Standardni problem maksimuma čini n varijabli i m ograničenja, forme „≤“ osim uvjeta nenegativnosti koji je specifičan u ekonomiji i kod veličina u proizvodnji. U općenitom slučaju, on dakle glasi:[5]

Max $\sum c_j x_j$

uz ograničenja:

$\sum a_j x_j \leq b_i$, i=1,2,…..m

i uvjet nenegativnosti:

$x_j \geq 0$, j=1,2,…n

Standardni problem u matričnom obliku izgleda ovako:

Max $C^T X$

$AX \leq B$

$X \geq 0$

[5] Babić, Z., Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, 2011., str. 71.

gdje je:[6]

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Izvor: Babić, Z. (2011); Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 72.

Vektor X je tipa (n, 1), a vector C tipa (n, 1) te vektor B tipa (m, 1). C^T je transponat matrice C, dakle matrica reda (1, m). A je matrica sustava ograničenja reda (m, n). Dual standardnog problema maksimuma je standardni problem minimuma te ima formu:

Min $\sum y_i b_i$

i ograničenja:

$\sum y_i b_i \geq c_j$, j = 1,2,…, n

i uvjet:

i uvjet: $y_i \geq 0$, i = 1,2,…,m

Glavna odlika standardnog problema je da su sva ograničenja izražena nejednažbama. Kako bi problem linearnog programiranja bio moguć, treba postojati barem jedan vektor X koji zadovoljava navedene kriterije uvjeta i ograničenja. Taj se vektor zove mogući vektor ili moguće rješenje problema linearnog programiranja. Rješenje je optimalno ako maksimizira linearnu funkciju, odnosno ako ju minimizira. Optimalno rješenje je ono koje odgovara funkciji cilja a to je Min ili Max zadanog problema.[7]

[6] Ibidem, str., 72.
[7] Ibidem, str., 88.

Svakom problemu maksimuma odgovara problem minimuma, stoga se u dualu javlja novi vektor Y, tipa (m, 1). To vodi ka zaključku da original ima m ograničenja i n varijabli, dok dual ima n ograničenja i m varijabli. S obzirom na navedeno razvidno je da je dual od dualnog problema opet originalni problem, pa je svejedno koji će se od ta dva problema zvati originalnim problemom.

2.5. Kanonski problem

Kanonski problem linearnog programiranja specifičan je po tome, jer u odnosu na standardni problem, ima sva ograničenja (osim uvjeta nenegativnosti) u formi jednadžbi. Zbog toga je pogodan za primjenu različitih metoda rješavanja problema linearnog programiranja. Kanonski problem linearnog programiranja za maksimum se može prikazati kao[8]

Max $\sum c_j x_j$

uz ograničenja:

$\sum a_j x_j = b_i$ i=1,2,…..m

i uvjet:

$x_j \geq 0$, j=1,2,…n

što se u matričnom obliku može zapisati kao:

Max $C^T X$

$AX = B$

$X \geq 0$

[8] Ibidem, str., 72.

Kanonski oblik linearnog modela za minimum jednak je kanonskom obliku linearnog modela za maksimum. Razlika je u funkciji cilja kod koje se „Max" zamjenjuje s riječju za minimiziranje „Min". Standardni i kanonski problem su ekvivalentni, pa se s lakoćom jedan transformira u drugi. To također znači da se rješavanjem jednog od tih problema može dobiti i rješenje drugog problema. Kako bi se standardni problem mogao transformirati u kanonski potrebno je nejednadžbu

$$AX \leq B$$

transformirati u jednadžbu, dodavanjem dodatnog nenegativnog vektora U na lijevu stranu, oblika:

$$AX + U = B$$

uz uvjet

$$U \geq 0$$

U izrazu je vektor U vektor dodatnih tj. oslabljenih varijabli, za razliku od komponenata vektora X koje se također naziva strukturnom varijablom. Vektor U u modelu linearnog problema ima nenegativnu vrijednost te ima oblik (m, 1). Koeficijenti dopunskih varijabli u funkciji cilja iznose nula. To znači da nemaju utjecaj na određivanje optimalnog rješenja, te se najčešće stoga izostave u funkciji cilja.[9]

2.6. Simpleks metoda

Simpleks metoda je iterativna (ponavljajuća) metoda te najpoznatija metoda rješavanja problema linearnog programiranja. Izvor kategorizacije metode proizlazi na osnovnu toga što polazi od nekog dopuštenog rješenja koje se kroz niz iteracija poboljšava dok ne dođe do optimalnog rješenja. U fazama iteracije i približavanju ka optimumu metoda se ponavlja i u konačnom broju iteracije deseže optimalno rješenje. Generalno, linearni program koji nije u standardnom obliku, najčešće sadrži ograničenja u formi jednadžbi i nejednadžbi. Također i same varijable mogu biti ograničene na nenegativnost ($x_i \geq 0$), ali to nije preduvijet metode.

[9] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, str. 89

Da bismo promatrali simpleks algoritam linearnog programiranja potrebno je konvertirati ga u ekvivalentni problem u kojem će sva ograničenja biti u obliku jednadžbi i sve varijable ograničene na nenegativnu vrijednost (tj. da su veće od nule). Takva forma linearnoga programiranja predstavlja osnovni oblik, a koji se ostvaruje uvođenjem novih, tzv. dopunskih ili dodatnih varijabli. Opisano se ostvaruje na sljedeći način:

1. ograničenja tipa ″≤″ konvertiramo u jednakost pribrajajući lijevoj strani dopunsku varijablu x_k i uvjet da ona bude nenegativna,
2. ograničenja tipa ″≥″ konvertiramo u jednakost oduzimajući lijevoj strani dodatnu varijablu x_l i uvjet da ona bude nenegativna.

Standardni problem maksimalizacije[10]

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + c_{2n} x_n \leq b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + c_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0, \qquad i = 1\ldots, m \quad j = 1\ldots, n$$

Potonje bi po matričnom zapisu izgledalo:

[10]Pašagić, H.: Matematičke metode u prometu, Zagreb, 2003, str 46.

$$Z=[z] \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Z=C^T\cdot X \\ A\cdot X\le B \\ X\ge 0 \end{array}}$$

Svakom problemu maksimizacije (minimizacije) odgovara problem minimizacije (maksimizacije) koji se zove dual zadanog problema. Originalni, tj. zadani, problem jest primal. Dual standardnog problema maksimizacije je standardni problem minimizacije koji se dobiva na sljedeći način. Ako je primal standardni problem maksimizacije dan sa :

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n & \le b_2 \\ a_mx_1 + a_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n & \le b_m \\ x_j \ge 0 \qquad i=1\dots, m \; j=1\dots, n & \end{array}$$

Tada je dual standardni problem minimizacije dan sa[11]:

$$\min z' = b_{11}y_{11} + b_{12}y_{12} + \dots + b_my_m$$

$$\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_i \ge 0 \qquad i=1\dots, m \quad j=1\dots, n \end{array}$$

Važi i obrnuto odnosno ako je primal standardni problem minimizacije onda je njegov dual standardni problem maksimizacije. Iz opisanog proizlazi prvi od tri teorema koji su pojašnjeni u nastavku.

[11] Ibidem str., 49.

Teorem 1. Ako je X moguće rješenje primala (maksimizacije) i Y moguće rješenje duala (minimizacije) tada je $C^TX \leq B^TY$ (C^TX je vrijednost ciljne funkcije za moguće rješenje X a B^TY je vrijednost ciljne funkcije za prihvatljivo rješenje Y)

Teorem 2. Ako su X* i Y* moguća rješenja primala (max) i duala (min) i ako je $C^TX^* = B^TY^*$ tada su X* i Y* optimalna rješenja tog para dualnih problema.

Teorem 3. Ako LP i njegov dual imaju moguća rješenja, tada imaju optimalno rješenje i vrijednosti ciljne funkcije tih rješenja su jednake u oba slučaja. Ako jedan od tih dvaju LP-a nema niti jedno moguće rješenje tada drugi nema optimalno rješenje. Ako je primal dan kao standardni problem maksimizacije znači da će dual biti standardni problem minimizacije (sva ograničenja tipa « ≥ « i sve varijable nenegativne tj. > 0. Vrijedi i obratno. Optimalno rješenje primala se iščitava iz optimalne tablice duala i obrnuto na sljedeći način.

Optimalne vrijednosti, odnosno rješenja varijabli odlučivanja, primala su jednake apsolutnim vrijednostima koeficijenata dopunskih varijabli u nultom retku optimalne tablice duala, a optimalna vrijednost ciljnih funkcija jednaka je u oba problema. Optimalne vrijednosti dopunskih varijabli poprimaju vrijednosti koje odgovaraju apsolutnim vrijednostima koeficijenata varijabli odlučivanja duala u nultom retku optimalne tablice duala.

Vidimo da u nekim slučajevima može biti zgodnije rješavati dual nego primal pa iz njega očitati rješenje primala. Moguće rješenja su prikazana u tablici 1.

Tablica 1: Odnosi među rješenjima

Rješenje primala	Rješenje odgovarajućeg duala
optimalno	optimalno
neograničeno	nemoguće (nema niti jednog dopuštenog rješenja)
nemoguće	neograničeno

Izvor.: Izradio autor

3. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA KOD PROIZVODNJE ULJA

3.1 Zvijezda ulja

Zvijezda posluje već preko 100 godina, a prepoznatljivi okusi Zvijezda proizvoda danas se pojavljuju na mnogim stolovima diljem Hrvatske.

Zvijezda uspješno posluje u vrhu hrvatskog prehrambenog tržišta. Kroz svoje robne marke Zvijezda, Margo i Omegol, Zvijezda uspješno zadovoljava potrebe i najzahtjevnijih potrošača. Zvijezdini proizvodi su izrađeni od prirodnih, strogo selektiranih sastojaka visoke kakvoće uz tehnološke postupke kojima su očuvani svi vrijedni sastojci.
Osim proizvoda u vlastitoj proizvodnji, Zvijezda pod svojom markom distribuira i trgovačku robu: ocat, ulje za prženje, bučino ulje, aditive, masline, konzervirano povrće i umake na bazi rajčice. Također distribuira i sireve tvrtke Belje, te proizvode tvrtke Dijamant.

Zvijezda nastavlja raditi na kvaliteti svojih proizvoda, te uvođenju novih kako bi se prilagodila aktualnim potrebama svojih vjernih potrošača. U ovom radu ograničit će se na proizvodnju Zvijezda ulja.

3.2 Definiranje i formuliranje modela na primjeru Zvijezda ulja

Model linearnog programiranja u proizvodnji Zvijezda ulja se može primjeniti na više problema, tako se može primjerice primjeniti kod minimiziranja troškova proizvodnje kada se uzmu u obzir troškovi cijena sirovina, ali se isto tako može maksimizirati profit poduzeća kada se uzme u obzir količina proizvodnje i sirovina koje su utrošene.

U radu će se definirati model linearnog programiranja u proizvodnji Zvijezda ulja. Podatci koji će se koristiti su spoj podataka dobivenih sa internet stranice tvrtke Zvijezda , ali i podatci koji su fiktivni.

Sljedeća tablica odnosno tablica 1 prikazuje 15 proizvoda koji se proizvode svakodnevno, te koji se plasiraju na tržište na prodaju. U tablici su prikazani podatci kao što su gornja i donja granica proizvodnje u tjednu, prodajna cijena po komadu, težina svakog proizvoda(odnosi se na težinu boce određene vrste ulja), trošak sirovine po proizvodu, kao i razlika između prodajne cijene svakog proizvoda i troška sirovine da bi se dobio prihod po svakom proizvodu.

Tablica 2: Popis artikala – proizvoda

Oznaka	Šifra artikla	Naziv artikla	Težina u kg	Tjedna količina proizvodnje (000) gornja donja granica		Prodajne cijene po komadu	Trošak sirovine po komadu	Prihod
B1	50	Omegol ulje	1,2	50	30	10	2,334	7,666
B2	51	Suncokretovo ulje	1,2	70	60	9	2,12	6,88
B3	52	Biljno ulje	1	65	45	12	2,764	9,236
B4	53	Mediteran ulje	1,1	40	29	15	3,010	11,99
B5	54	Ekstra djevičansko ulje	1	42	30	25	3,55	21,45
B6	55	Maslinovo ulje	1,2	5,55556	5	20	3,145	16,855
B7	56	Bučino ulje	1,3	30	20	15	3,212	11,788

Izvor: podatke odredio autor

Tablica 3. Prikazuje popis korištenih sirovina koje su potrebne za proizvodnju određenog proizvoda iz tablice 2. , te njihove cijene po kilogramu, dekagramu i gramu.

Tablica 3: Popis korištenih sirovina

Oznaka	Šifra	Naziv sirovine	Cijene po 1 kg	Cijene po 1 g	Cijena po 1 dag
C1	71	Uljana repica	2,37	0,00237	0,0237
C2	72	Suncokret	2,30	0,00230	0,0230
C3	73	Ulje kukuruzne klice	2,40	0,00240	0,0240
C4	74	Maslina	7,5	0,0075	0,075
C5	75	Rafinirano ulje	2,11	0,00211	0,0211
C6	76	Bučina sjemenka	4	0,004	0,04
C7	77	Plastična boca	1	0,001	0,01
C8	78	Staklena boca	3,5	0,0035	0,035
C9	79	Čep	0,4	0,0004	0,004
C10	80	Etiketa	2,22	0,00222	0,0222

Izvor: podatke odredio autor

Tablica 4. Prikazuje količine sirovina u dekagramima koje su korištene po jedinici proizvoda, a sama tablica se sastoji od 7 proizvoda 10 sirovina.

Tablica 4: Količina sirovina (u dekagramima) po jedini proizvoda

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7S
C1	500		400				
C2	100	750	300	350			
C3	100						
C4				440	800	450	
C5						450	
C6							800
C7	20	20	20	20			
C8					50	45	40
C9	5	5	5	5	10	10	8
C10	2	3,3	3,3	3,3	4	4	3

Izvor: podatke izradio autor

Sada kada su se definirali svi podatci koji su potrebni da bi se riješio problem linearnog programiranja, model se može postaviti. Funkcija cilja koju je potrebno maksimizirati ima oblik:

Max Z = 7,666 x1 + 6,88 x2 + 9,236 x3 + 11,99 x4 + 21,45 x5 + 16,855 x6 + 11,788 x7

Sve količine sirovina koje se koriste u ovom modelu kao ograničenja, su polustvarne veličine koje su koriste u proizvodnji Zvijezda ulja u jednome tjednu.

C1 500 x1 + 400 x3 ≤ 35 000 000 /100

C2 100 x1 + 750 x2 + 300 x3 + 350 x4 ≤ 72 000 000 /100

C3 100 x1 ≤ 3 000 000

C4 440 x4 + 800 x5 + 450 x6 ≤ 40 000 000/100

C5 450 x6 ≤ 2 500 000

C6 800 x7 ≤ 3 000 000

C7 20 x1 + 20 x2 + 20 x3 + 20 x4 ≤ 3 300 000/10

C8 50 x5 + 45 x6 + 40 x7 ≤ 2 137 500

C9 5 x1 + 5 x2 + 5 x3 + 5 x4 + 10 x5 + 10 x6 + 8 x7 ≤ 1 350 000

C10 2 x1 + 3,3 x2 + 3,3 x3 + 3,3 x4 + 4 x5 + 4 x6 + 3 x7 ≤ 750 000

C3, C5, C6 su izbačeni iz razloga što su ta ograničenja već obuhvaćena sa gornjim i donjima granicama proizvodnje proizvoda, pa tako preostaje 7 ograničenja. Pojedine jednadžbe , kao što su to C1, C2, C4 su podijeljene sa 100 odnosno jednažba C7 je podijeljene sa 10 radi jednostavnosti izračuna u program WinQSB programa.

Nakon što su izbačene jednadžbe C3, C5, C6 kao i nakon dijeljenja C1, C2, C4 i C7 dobije se idući sustav ograničenja:

C1 5 x1 + 4 x3 ≤ 350 000

C2 1 x1 + 7.5 x2 + 3 x3 + 3.5 x4 ≤ 720 000

C4 4.4 x4 + 8 x5 + 4.5 x6 ≤ 400 000

C7 2 x1 + 2 x2 + 2 x3 + 2 x4 ≤ 330 000

C8 $50\ x5 + 45\ x6 + 40\ x7 \leq 2\ 137\ 500$

C9 $5\ x1 + 5\ x2 + 5\ x3 + 5\ x4 + 10\ x5 + 10\ x6 + 8\ x7 \leq 1\ 350\ 000$

C10 $2\ x1 + 3{,}3\ x2 + 3{,}3\ x3 + 3{,}3\ x4 + 4\ x5 + 4\ x6 + 3\ x7 \leq 750\ 000$

Poslije uvedenih ograničenja količine sirovina, sada treba uveti i ograničenja maksimalne i minimalne količine proizvodnje. Potrebno je odrediti granice za minimalnu i maksimalnu količinu proizvodnje kako bi se ostvarila optimalna količina proizvodnje, te iskorištenost resursa.

Ograničenja za minimalnu i maksimalnu proizvodnju imaju idući oblik:

$30\ 000 \leq x1 \leq 50\ 000$

$60\ 000 \leq x2 \leq 70\ 000$

$45\ 000 \leq x3 \leq 65\ 000$

$29\ 000 \leq x4 \leq 40\ 000$

$30\ 000 \leq x5 \leq 42\ 000$

$5000 \leq x6 \leq 5555{,}56$

$3000 \leq x7 \leq 3750$

Uvjet nenegativnosti je:

$xj \geq 0\ ,\ j = 1{,}2,\ \ldots 7$

Kada je postavljena funkcija cilja, kao i kada su navedena sva ograničenja treba sve ove podatke unijeti u računalni program WinQSB pomoću kojeg će se dobiti riješenje ovog linearnog problema. Nakon što su svi podatci uneseni u program dobije se sljedeće:

Slika 2: Ulazni podaci u program WinQSB

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Direction	R. H. S.
Maximize	7.666	6.88	9.236	11.99	21.45	16.855	11.788		
C1	5		4					<=	350000
C2	1	7.5	3	3.5				<=	720000
C4				4.4	8	4.5		<=	400000
C7	2	2	2	2				<=	330000
C8					50	45	40	<=	2137500
C9	5	5	5	5	10	10	8	<=	1350000
C10	2	3.3	3.3	3.3	4	4	3	<=	750000
LowerBound	30000	60000	45000	29000	30000	5000	3000		
UpperBound	50000	70000	65000	40000	42000	5555.556	3750		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Izvor: program WinQSB

Slika 3: Optimalno rješenje

	20:22:25		2.9.2019. 20:22:25	2.9.2019. 20:22:25	2.9.2019. 20:22:25	2.9.2019. 20:22:25		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	30.000,0000	7,6660	229.980,0000	-1,5700	at bound	-M	9,2360
2	X2	60.000,0000	6,8800	412.800,0000	-2,3560	at bound	-M	9,2360
3	X3	46.000,0000	9,2360	424.856,0000	0	basic	7,6660	M
4	X4	29.000,0000	11,9900	347.710,0000	-9,0435	at bound	-M	21,0335
5	X5	30.925,0000	21,4500	663.341,3000	0	basic	5,0073	29,9644
6	X6	5.555,5560	16,8550	93.638,9000	0	basic	12,0656	M
7	X7	3.750,0000	11,7880	44.205,0000	0	basic	0	M
	Objective	Function	(Max.) =	2.216.531,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	334.000,0000	<=	350.000,0000	16.000,0000	0	334.000,0000	M
2	C2	719.500,0000	<=	720.000,0000	500,0000	0	719.500,0000	M
3	C4	400.000,0000	<=	400.000,0000	0	2,6813	392.600,0000	430.600,0000
4	C7	330.000,0000	<=	330.000,0000	0	4,6180	328.000,0000	330.333,3000
5	C8	1.946.250,0000	<=	2.137.500,0000	191.250,0000	0	1.946.250,0000	M
6	C9	1.219.806,0000	<=	1.350.000,0000	130.194,4000	0	1.219.806,0000	M
7	C10	662.672,3000	<=	750.000,0000	87.327,7700	0	662.672,3000	M

Izvor: program WinQSB

Tablica na slici 3. prikazuje optimalno rješenje. Optimalna količina proizvodnje za svaki proizvod xj je:

X1 = 30.000

X2 = 60.000

X3 = 46.000

X4 = 29.000

X5 = 30.925

X6 = 5.555,5560

X7 = 3.750

Pri proizvodnji optimalne količine ukupna dobit iznosi 2.216.531 kn.

S obzirom na dobivene rezultate optimalne proizvodnje, kao i na temelju postavljenih ograničenja proizvodnje, da se zaključiti da svi proizvodi osim x6 i x7 imaju minimalnu razinu proizvodnje, dok x6 I x7 imaju maksimalnu proizvodnju.

Dopunske varijable pokazuju iskorištenost sirovina (Slack or Surplus). U slučaju da je vrijednost dopunskih varijabli jednaka 0, tada su sirovine iskorištene u potpunosti. Ukoliko je vrijednost dopunske varijable veća od 0 tada je riječ o višku sirovina, a ukoliko je vrijednost dopunske varijable manja od 0 tada je riječ o manjku sirovina.

Dopunske varijable iznose:

u1 = 16 000, potrebna količina uljane repice je manja za 16 000 dag od raspoložive količine, pa se može zaključiti da je ostalo neiskorišteno 16 000 dag uljane repice

u2 = 500, potrebna količina suncokreta je manja za 500 dag od raspoložive količine, pa se može zaključiti da je ostalo neiskorišteno 500 dag suncokreta

u4 = 0, može se zaključiti da je iskorištena sva količina maslina, jer je ostalo 0 dag maslina

u7 = 0, može se zaključiti da je iskorištena sva količina plastičnih boca, jer je ostalo 0 dag plastičnih boca

u8 = 191 250, potrebna količina staklenih boca je manja za 191 250 dag od raspoložive količine, pa se može zaključiti da je ostalo neiskorišteno 191 250 dag staklenih boca

u9 = 130 194,4, potrebna količina čepova je manja za 130 194,4 dag od raspoložive količine, pa se može zaključiti da je ostalo neiskorišteno 130 194,4 dag čepova

u10 = 87 327,77, potrebna količina etiketa je manja za 83 327,77 dag od raspoložive količine, pa se može zaključiti da je ostalo neiskorišteno 87 327,77 dag etiketa

4. ZAKLJUČAK

Cilj svih poduzeća koje konkuriraju na nekom tržištu je da minimiziraju troškova, odnosno da maksimiziraju svoj profit. Svako poduzeće želi bit efikasno u svom poslovanju kako bi što bolje konkuriralo i imalo veću korist od obavljanja svoje poslovne aktivnosti.

Poduzeću u svom cilju da posluje što efikasnije pomaže primjena linearnog programiranja. Primjenom linearnog programiranje moguće je dobiti optimalna rješenja koja pomažu u optimizaciji poslovanja nekog poduzeća.

U ovom radu se pomoću računalog programa WinQSB došlo to optimalnog rješenja kod proizvodnje Zvijezda ulja. WinQSB je kvantitativni sustav za poslovanje.

WinQSB je računalni program koji se koristi kod linearnog programiranja, asignacije, problema transporta i sl., kako bi se utvrdilo kako ostvariti minimalne troškove, maksimizirati profit poduzeća, kako smanjiti vrijeme obavljanja posla i još mnogo drugih pitanja s kojima se poduzeće susreće tokom poslovanja.

U primjeru linearnog programiranja postavljen je model koji daje optimalne količine proizvoda. S obzirom na rezultate koje smo dobili rješavanjem, može se reći da većina proizvoda koja se proizvode u jednom tjednu imaju minimalnu razinu proizvodnje s obzirom na dana ograničenja tjedne razine proizvodnje za svaki proizvod. Funkcija cilja predstavlja ukupnu dobit, te ona u ovom primjeru iznosi 2.216.531 kn.

S obzirom na prednosti koje pruža primjena linearnih metoda, kao i na činjenicu da sama poduzeća posluju efikasnije, sva bi poduzeća bez obzira na to čime se bave trebala primjenjivati metode linearnog programiranja, te bi tako postali konkurentniji na tržištu i ostvarivali veću poslovnu dobit.

5. SAŽETAK

U prvom poglavlju, odnosno uvodu ovog rada objašnjeni su svrha i način na koji će ovaj rad biti obrađen.

U drugom poglavlju opisana je povijest linearnog programiranja, obrađen je pojam linearnog programiranja, kao i osnovne postavke linearnog programiranja, te standardni i kanonski problem linearnog programiranja.

U trećem poglavlju odnosno u praktičnom primjeru je kroz primjer Zvijezda ulja obrađen problem linearnog programinja. Problem je riješen primjenom računalnog program WinQSB, te su dobivena optimalna rješenja koji će maksimizirati dobit poduzeća.

Četvrto poglavlja je zaključak cijelokupnog rada, te se tu može vidjeti osvrt na čitavi rad, kao i na dobivene rezultate.

Ključne riječi:

1. Linearno programiranja
2. Zvijezda ulja
3. Računali program WinQSB

6. SUMMARY

The first chapter is the introduction of the subject of this research defined aswell as the way this research is going to be covered.

In the second chapter is the history of linear programming explained, the term linear programming is explained, aswell as basic methods of linear programming and the standard and canonical problem of linear programming.

In the third chapter which is the practical part of this research, we have through the example of Zvijezda oil covered the problem of linear programming. The problem has been solved thourgh the application of the computer program WinQSB, which gave optimal solutions which will maksimize the profit of this company.

The fourth chapter is the conclusion of this whole research, where we can find the review of this research aswell as the answers we have gotten from solving this problem.

Keywords:

1. Linear programming
2. Zvijezda oil
3. Computer program WinQSB

LITERATURA

Knjige:

1. Babić, Z. (2011.): Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Split, Split
2. Mirković, D. (1963.): Osnovi linearnog programiranja, Zavod za produktivnost rada, Sarajevo
3. Omrčen S. (2017): Optimiranje poslovnog procesa u pekarskoj proizvodnji, Ekonomski fakultet u Splitu, Split
4. Pašagić, H. (2003.) Matematičke metode u prometu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb

Internet izvor:

1. ‘’Zvijezda’’ - https://www.zvijezda.hr/o-nama/povijest/

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA